

# ANALÝZA ROZPTYLU (ANOVA)

K posouzení významnosti zdrojů variability v datech:

1. Vliv přípravy na výsledek (analýzy),
2. Vliv přístroje, člověka, experimentu na výsledek,
3. Vliv laboratoří na výsledek analýz,
4. Vyhodnocování plánovaných experimentů,
5. Vliv faktorů A, B, C, ... (např. teploty, času, a koncentrace) na výsledek (analýzy).

rozptyl = složka objasněná + složka neobjasněná  
(známé zdroje variability) (náhodné chyby)

faktor A je na jistých úrovních  $A_1, A_2, A_3$

zdrojem variability měření  $y_{ij}$  jsou úrovně  $A_1, A_2, A_3$

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

$\mu_i$  je skutečná hodnota a  $\varepsilon_{ij}$  je j-tá náhodná chyba

**Cíl: který z faktorů A, B, C, ... má významný vliv na výsledek analýzy (např. reakční výtěžek)  $\mu$  ?**  
Hodnotu  $\mu$  zde odhadujeme  $\bar{x}_i, i = 1, \dots, n_i$ .

## Jednofaktorová analýza rozptylu

Faktor A má K úrovní  $A_1, \dots, A_K$ .

Na každé úrovni  $A_i$  je provedeno  $n_i$  měření  $\{y_{ij}\}, j = 1, \dots, n_i$ .

Celkový počet měření je  $N = \sum_{i=1}^K n_i$

Uspořádání dat:

	Úroveň faktoru						Celék
	$A_1$	$A_2$	...	$A_i$	...	$A_K$	
Opakování měření	$y_{11}$	$y_{21}$	...	$y_{i1}$	...	$y_{K1}$	
	$y_{12}$	$y_{22}$	...	$y_{i2}$	...	$y_{K2}$	
	...	...	...	...	...	...	
	...	...	...	...	...	...	
	$y_{1n_1}$	$y_{2n_2}$	...	$y_{in_i}$	...	$y_{Kn_K}$	
Průměry	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\mu}_2$	...	$\hat{\mu}_i$	...	$\hat{\mu}_K$	$\hat{\mu}$
Počet	$n_1$	$n_2$	...	$n_i$	...	$n_K$	$N$

Sloupcový průměr

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

Celkový průměr

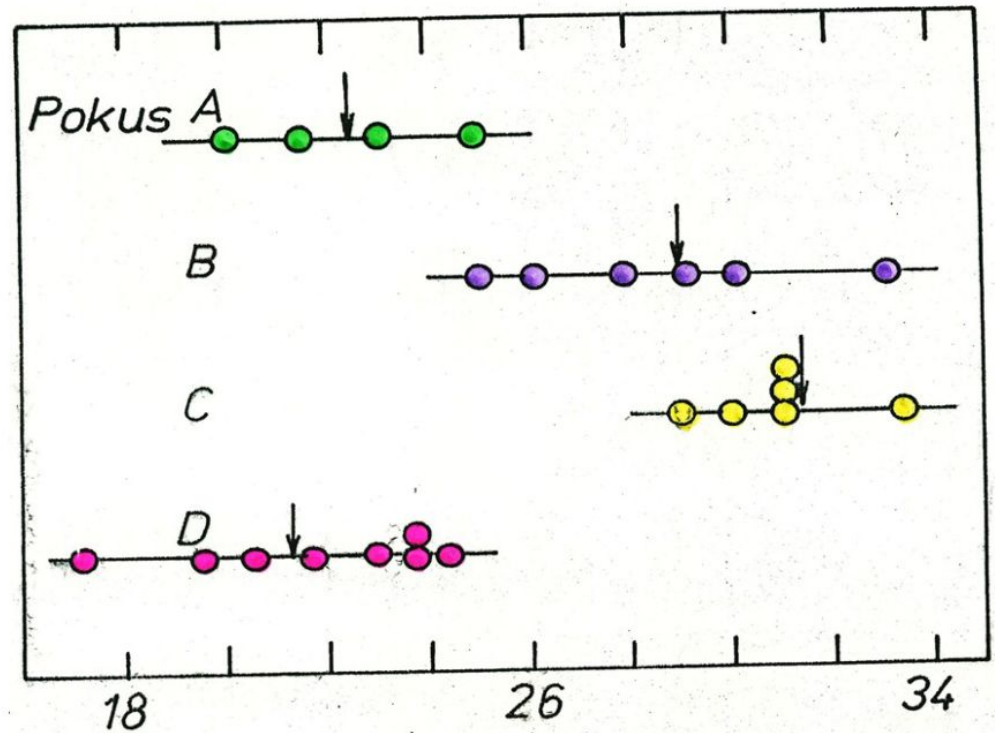
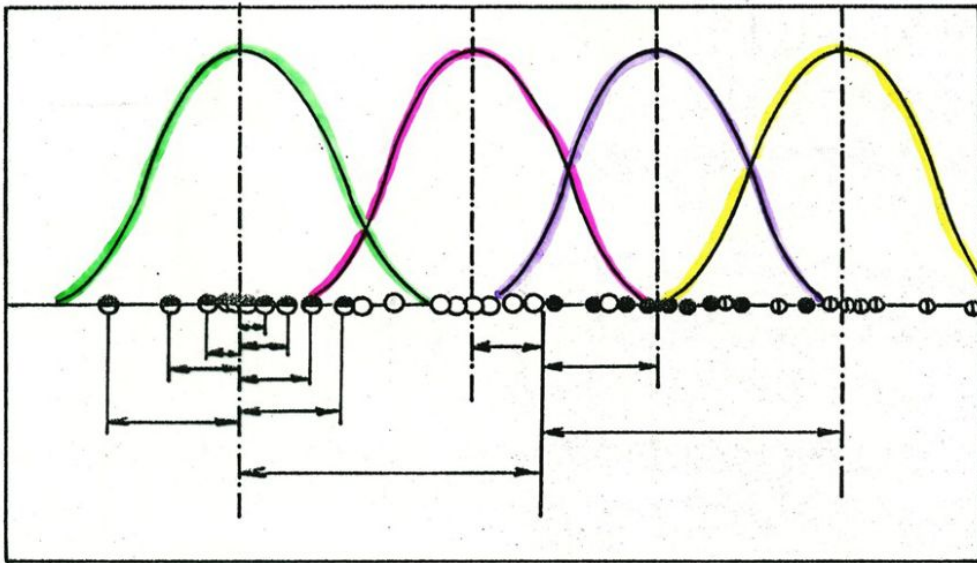
$$\hat{\mu} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{\mu}_i$$

Odhad efektů

$$\hat{\alpha}_i = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}$$

za podmínky

$$\sum_{i=1}^K n_i \alpha_i = 0$$



## A. Modely s pevnými efekty

**Předpoklad:** náhodné chyby  $\varepsilon_{ij}$  jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením  $N(0, \sigma^2)$ .

**Součet čtverců odchylek od celkového průměru  $S_c$**

$$S_c = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{\mu})^2$$

lze rozložit na dvě složky

$$S_c = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} [(y_{ij} - \hat{\mu}_i) + (\hat{\mu}_i - \hat{\mu})]^2 = S_A + S_R$$

kde  $S_A$  je ~~rozdíl~~ **mezi jednotlivými úrovněmi faktoru A**

$$S_A = \sum_{i=1}^K n_i (\hat{\mu}_i - \hat{\mu})^2$$

a  $S_R$  je ~~rozdíl~~ **reziduální  $S_R$** , tj. uvnitř jednotlivých úrovní

$$S_R = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{\mu}_i)^2$$

Jednofaktorová ANOVA u modelu s pevnými efekty

Součet čtverců	Počet st. voln.	Průměrný čtverec	Očekávaná hodnota
Mezi úrovněmi $S_A = \sum_{i=1}^K n_i (\hat{\mu}_i - \hat{\mu})^2$	$K - 1$	$\frac{S_A}{K - 1}$	$\sigma_e^2 + \frac{\sum_{i=1}^K n_i \alpha_i^2}{K - 1}$
Reziduální $S_R = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{\mu}_i)^2$	$N - K$	$\frac{S_R}{N - K}$	$\sigma_e^2$
Celkový $S_A + S_R$	$N - 1$	-	-

Hypotéza nulová  $H_0: \alpha_i = 0, i = 1, \dots, K,$   
vs. alternativní  $H_A: \alpha_i \neq 0, i = 1, \dots, K.$

**Testační statistika** (Fisher-Snedecorova F-testu):

$$F_{\text{exp}} = \frac{S_A (N - K)}{S_R (K - 1)}$$

**Testování:** Je-li  $F_{\text{exp}} > F_{1-\alpha}(K - 1, N - K)$ , je nutné  $H_0$  zamítnout a efekty považovat významné.

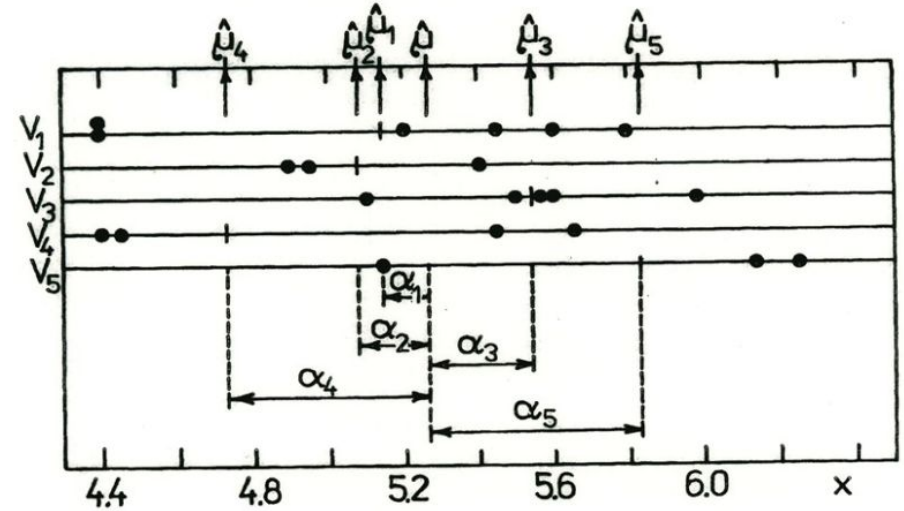
**Příklad 5.1 Testování kvality  $AgNO_3$  od různých výrobců**

U  $AgNO_3$  od pěti dodavatelů byla sledována kvalita chemikálie. Z každé láhve byl odebrán počet vzorků ( $n_1 = n_3 = 6, n_2 = n_5 = 3, n_4 = 4$ ). Otázka: *Existují významné rozdíly v kvalitě  $AgNO_3$  od těchto výrobců.*

Procentuální obsah chlóru při užití  $AgNO_3$  od pěti výrobců

Měření	Výrobce				
	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$
1	4.40	4.90	5.55	4.45	5.15
2	4.40	4.95	5.10	5.45	6.25
3	5.20	5.40	5.50	4.65	6.14
4	5.45	-	5.98	4.40	-
5	5.80	-	5.60	-	-
6	5.60	-	5.56	-	-

**Řešení:**  $\hat{\mu} = 5.2715,$   
 $\hat{\mu}_1 = 5.1417; \hat{\mu}_2 = 5.0833; \hat{\mu}_3 = 5.5483;$   
 $\hat{\mu}_4 = 4.7375; \hat{\mu}_5 = 5.8467;$   
 $\hat{\alpha}_1 = -0.1298; \hat{\alpha}_2 = -0.1882; \hat{\alpha}_3 = 0.277;$   
 $\hat{\alpha}_4 = -0.534; \hat{\alpha}_5 = 0.575.$



Tabulka analýzy rozptylu pro jednoduché třídění u modelu s pevnými efekty

Součet čtverců	Počet stupňů volnosti	Průměrný čtverec	Očekávaná hodnota
Mezi úrovněmi $S_A$	$K - 1$	$\frac{S_A}{K - 1}$	$\sigma_e^2 + \frac{\sum_{i=1}^K n_i \alpha_i^2}{K - 1}$
Reziduální $S_R$	$N - K$	$\frac{S_R}{N - K}$	$\sigma_e^2$
Celkový $S_c$	$N - 1$	-	-

Pro  $\alpha = 0.05$  je kvantil  $F_{0.95}(4, 17) = 2.96$ .

Analýza rozptylu pro obsah  $AgNO_3$

Součet čtverců	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	$F_e$
Mezi výrobci $S_A = 2.8000$	4	0.6999	3.106
Reziduální $S_R = 3.8322$	17	0.2254	-
Celkový $S_c = 6.632$	20	-	-

**Závěr:**

$F_e > F_{0.95}(4, 17)$ , a proto  $H_0$  je nutné zamítnout.

**Kvalita  $AgNO_3$  od pěti výrobců se významně liší.**

# Ověření normality chyb

1. Rankitové grafy,
2. Standardizovaná rezidua

$$\hat{e}_{Si} = \frac{\hat{e}_{ij}}{\hat{\sigma} \sqrt{1 - \frac{1}{n_i}}}$$

mají přibližně normální rozdělení  $N(0, 1)$ .

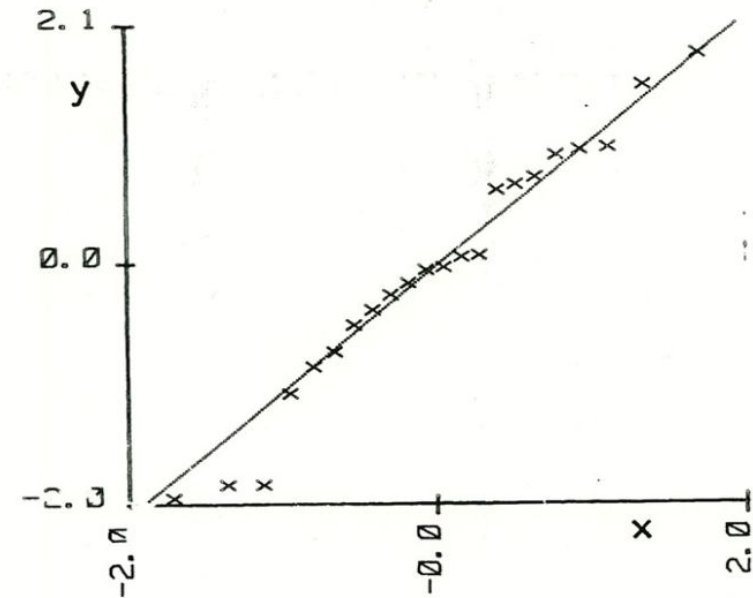
# Vyšetření vybočujících hodnot

Užívají se Jackknife rezidua  $e_{Jij}$

$$\hat{e}_{Jij} = \hat{e}_{Sij} \sqrt{\frac{N - K - 1}{N - K - \hat{e}_{Sij}^2}}$$

**Test:** pro  $\hat{e}_{Jij}^2 > 10$ ,  
lze  $y_{ij}$  považovat za silně vybočující.

**Indikace  $\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma^2)$ :** rankitový graf, t. zn. přímka s nulovým úsekem a jednotkovou směrnici.



## Druhy analýzy rozptylu:

### Jednofaktorová analýza rozptylu (faktor A)

rozklad  $\mu_i$ :  $\mu_i = \mu + \alpha_i$

- na průměr  $\mu$  ze všech úrovní faktoru A,
- *efekt*  $\alpha_i$  od i-té úrovně faktoru A,

Nulová hypotéza  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ,  
nebo-li  $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

### Vícefaktorová analýza rozptylu (faktory A, B, C, ...)

rozklad  $\mu_{ij}$ :  $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_{ij}$

- na celkový průměr  $\mu$ ,
- složky  $\alpha_i$  odpovídající vlivu faktoru A,
- složky  $\beta_j$  odpovídající vlivu faktoru B,
- a interakce  $\tau_{ij}$  faktoru A s faktorem B,

# Dvoufaktorová analýza rozptylu

V cele je obecně  $n_{ij}$  pozorování.

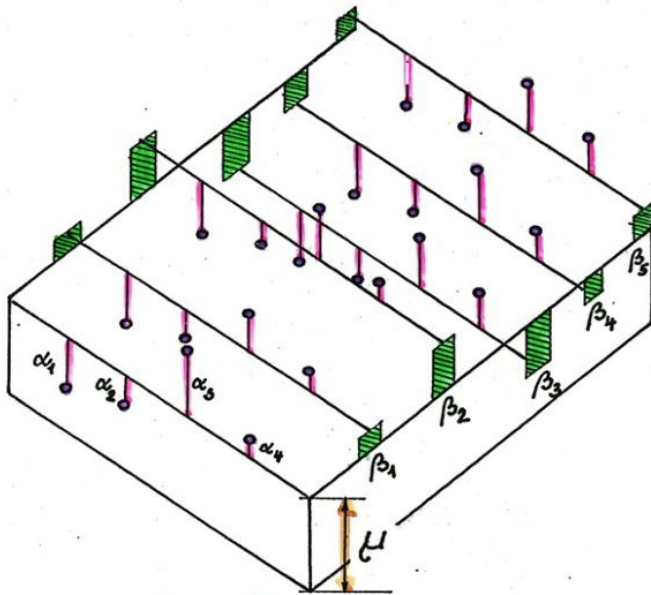
**ANOVA bez opakování:** v každé cele je 1 pozorování,

$$y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

řádkové efekty  $\alpha_i$ , sloupcové  $\beta_j$  efekty, interakce  $\tau_{ij}$

	$B_1$	$B_2$	...	$B_M$
$A_1$	.	.	...	.
$A_2$	.		...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
$A_N$	.	.	...	.

cela  $A_2 B_2$



$H_0: \bigcirc = \square = \blacksquare$  vs.  $H_A: \bigcirc \neq \square \neq \blacksquare$   
 $\varepsilon_{ij} = \alpha_i = \beta_j$  vs.  $\varepsilon_{ij} \neq \alpha_i \neq \beta_j$

**Tukeyův model interakce:**  $\tau_{ij} = C \alpha_i \beta_j$

kde C je konstanta.

**Řádkově lineární model interakcí:**  $\tau_{ij} = \gamma_i \beta_j C_R$

**Sloupcově lineární model interakcí:**  $\tau_{ij} = \alpha_i C_K \delta_j$

**Aditivně-multiplikační model interakcí:**

$$\tau_{ij} = \gamma_i \delta_j C_W$$

## Modely s pevnými efekty bez opakování

(Každá cela: 1 hodnota)

**Předpoklady:**

- Náhodné chyby  $\varepsilon_{ij}$  jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením  $N(0, \sigma^2)$ .
- Omezující podmínky:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 0; \quad \sum_{j=1}^M \beta_j = 0; \quad \sum_{i=1}^N \tau_{ij} = 0; \quad \sum_{j=1}^M \tau_{ij} = 0$$

- U modelů bez interakce je  $\tau_{ij} = 0$  pro  $i = 1, N, j = 1, M$ .

## Odhady parametrů:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M y_{ij}$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M y_{ij} - \hat{\mu}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_{ij} - \hat{\mu}$$

Výpočet rezidua  $\hat{e}_{ij}$

$$\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j$$

výpočet interakce

$$\tau_{ij} = E(y_{ij}) - \mu - \alpha_i - \beta_j \approx \hat{e}_{ij}$$

**Tukeyův model interakce:** ze směrnice C přímky grafu neaditivity

$\hat{e}_{ij}$  vs.  $\hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j$  se odhaduje míra interakce

$$\hat{C} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \hat{e}_{ij} \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_i^2 \hat{\beta}_j^2}$$

Nenulová směrnice znamená interakci faktorů a součet čtverců odchylek Tukeyho interakce  $S_T$  je k testování

$$S_T = \frac{\left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M y_{ij} \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_i^2 \hat{\beta}_j^2}$$

Součet čtverců pro	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Kritérium F
Faktor A $S_A = M \sum_{i=1}^N \alpha_i^2$	N - 1	$M_A = S_A / (N-1)$	$F_A = M_A / M_{AB}$
Faktor B $S_B = N \sum_{j=1}^M \beta_j^2$	M - 1	$M_B = S_B / (M-1)$	$F_B = M_B / M_{AB}$
Interakce (Tukey) $S_T = \dots$	1	$M_T = S_T$	$F_T = M_T / M_E$
Reziduální $S_R = S_{AB} - S_T$	N M - N - M	$M_E = S_R / (NM - N - M)$	-
Celkový $S_C = \sum_{(i)} \sum_{(j)} (\hat{\mu} - y_{ij})^2$	N M - 1	-	-

**Příklad 5.8 Stanovení vody v rozpouštědlech v různých laboratořích**  
U všech vzorků  $A_1, A_2$  a  $A_3$  nového rozpouštědla byl ve čtyřech laboratořích  $B_1, B_2, B_3$  a  $B_4$  určen obsah vody.

**Otázka:** jsou významné odchylky v obsahu vody v zadaných vzorcích rozpouštědla a ve výsledcích zvolených laboratoří.

**Data:** N = 3, M = 4

Obsah vody [%] v rozpouštědle určený v různých laboratořích

Vzorek	Laboratoř			
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>
A <sub>1</sub>	1.35	1.13	1.06	0.98
A <sub>2</sub>	1.40	1.23	1.26	1.22
A <sub>3</sub>	1.49	1.46	1.40	1.35

**Řešení:**  $\hat{\mu} = 1.2775$ ;

$\hat{\alpha}_1 = -0.1475$ ;  $\hat{\alpha}_2 = 0$ ;  $\hat{\alpha}_3 = 0.1475$ ;

$\hat{\beta}_1 = 0.1358$ ;  $\hat{\beta}_2 = 0.0042$ ;  $\hat{\beta}_3 = -0.0375$   $\hat{\beta}_4 = -0.0942$ .

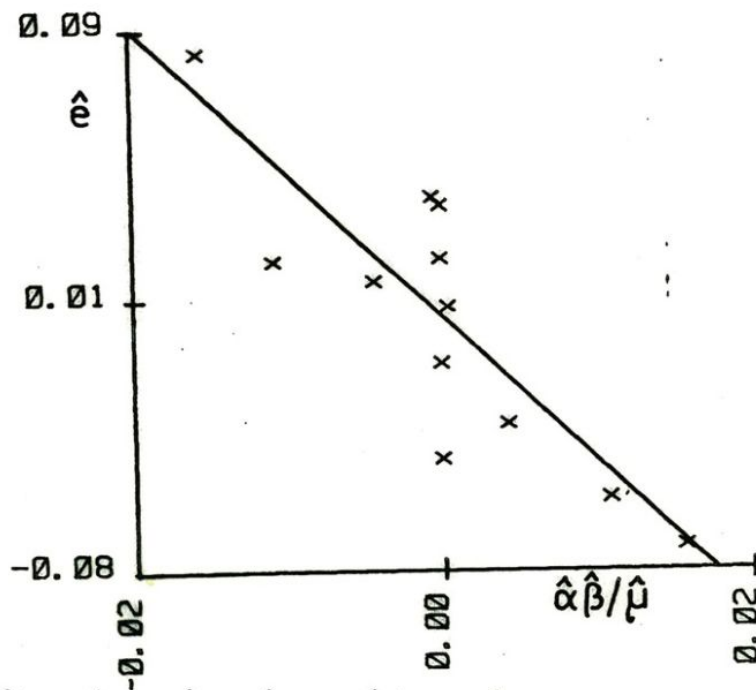
$\hat{C} = -3.532$

$S_T = 0.0156$ ,

$S_{AB} = 0.02215$ ,

$M_{AB} = 0.003692$ .





Graf neaditivity ukazuje výrazný trend.

## Vyvážené modely

V každé cele je  $n_{ij} = n$  pozorování.

Ohadem  $\mu_{ij}$  jsou aritmetické průměry

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ijk}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \hat{\mu}_{ij}$$

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu}$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu}$$

Analýza rozptylu dat obsahu vody v rozpouštědlech

Součet čtverců pro	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Kritérium F
Vzorky A, $S_A=0.174$	2	0.087	19.64
Laboratoře B, $S_B=0.0862$	3	0.0287	6.49
Interakce Tukey, $S_T= 0.0156$	1	0.0156	3.522
Reziduální, $S_R= 0.0222$	5	0.00443	-
Celkový, $S_C=0.2824$	11	0.02568	-

$F_{0.95}(1, 5) = 6.61$ ,  $F_{0.95}(2, 5) = 5.79$  a  $F_{0.95}(3, 5) = 5.41$ .

**Závěr:** Efekt interakce je nevýznamný a lze použít aditivní model analýzy rozptylu, zatímco efekty vzorků a laboratoří významné jsou.

odhad reziduí

$$\hat{e}_{ijk} = y_{ijk} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j$$

odhad interakcí

$$\hat{\tau}_{ij} = \hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j$$

K ověření interakce lze vynášet graf  $\hat{\tau}_{ij}$  vs.  $\hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j$ .

Průměrné hodnoty

$$E(M_A) = \sigma^2 + \frac{n M \sum_{i=1}^N \alpha_i^2}{(N-1) \sigma^2} = \sigma^2 + n M \sigma_A^2$$

$$E(M_B) = \sigma^2 + \frac{n N \sum_{j=1}^M \beta_j^2}{(M - 1) \sigma^2} = \sigma^2 + n N \sigma_B^2$$

a

$$E(M_{AB}) = \sigma^2 + \frac{n \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \tau_{ij}^2}{(N - 1) (M - 1) \sigma^2} = \sigma^2 + n \sigma_{AB}^2$$

Rozptyl  $M_R$  je nevychýleným odhadem  $\sigma^2$  rozptylu chyb.

Rozptyly  $\sigma_A^2$ ,  $\sigma_B^2$  a  $\sigma_{AB}^2$  odpovídají efektům řádků, sloupců a interakcí.

**Test:** s využitím  $F_{AB}$ ,  $F_B$  a  $F_A$ , zda je možné považovat sloupcové a řádkové efekty, resp. interakce za nevýznamné.

**$H_0: \tau_{ij} = 0, i = 1, \dots, N$  a  $j = 1, \dots, M$ ,**  
Je-li  $F_{AB} > F_{1-\alpha}\{(N - 1) (M - 1), M N (n - 1)\}$  je  $H_0$  zamítnuta.

**$H_0: \alpha_i = 0, i = 1, \dots, N$**   
Je-li  $F_A > F_{1-\alpha}\{(N - 1), M N (n - 1)\}$  je  $H_0$  zamítnuta.

**$H_0: \beta_j = 0, j = 1, \dots, M$**   
Je-li  $F_B > F_{1-\alpha}\{(M - 1), M N (n - 1)\}$  je  $H_0$  zamítnuta.

Dvofaktorová ANOVA pro vyvážený experiment

Součet čtverců pro	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	Kritérium F
Faktor A $S_A = n M \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i^2$	$N - 1$	$M_A = \frac{S_A}{N - 1}$	$F_A = \frac{M_A}{M_R}$
Faktor B $S_B = n N \sum_{j=1}^M \hat{\beta}_j^2$	$M - 1$	$M_B = \frac{S_B}{M - 1}$	$F_B = \frac{M_B}{M_R}$
Interakce AB $S_{AB} = n \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \hat{\tau}_{ij}^2$	$(N - 1)(M - 1)$	$M_{AB} = \frac{S_{AB}}{(N - 1)(M - 1)}$	$F_{AB} = \frac{M_{AB}}{M_R}$
Reziduální $S_R = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \hat{\mu}_{ij})^2$	$M N n - 1$	$M_R = \frac{S_R}{M N (n - 1)}$	-
Celkový $S_C = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y})^2$	$M N (n - 1)$	-	-

**Příklad 5.12 Přesnost chromatografického stanovení diethylenglykolu**  
Tři laboranti  $A_1, A_2$  a  $A_3$  provádějí dvě opakovaná stanovení diethylenglykolu (DEG) v ethylenglykolu na třech chromatografech  $B_1, B_2$  a  $B_3$ .

**Otázka:** má na výsledek analýzy má vliv přístroj či laborant.

**Data:**  $N = 3, M = 3, n = 2$ .

Obsahy DEG [%], měřené třemi laboranty A na třech přístrojích B

Laborant	Přístroj		
	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$A_1$	0.110	0.101	0.108
	0.116	0.102	0.109
$A_2$	0.112	0.115	0.111
	0.111	0.106	0.109
$A_3$	0.114	0.107	0.113
	0.112	0.109	0.110





### Řešení:

Součet čtverců pro	Stupně volnosti	Průměrný čtverec	F-kritérium
Laboranty (A): $S_A = 3.811 \cdot 10^{-5}$	2	$1.906 \cdot 10^{-5}$	2.433
Přístroje (B): $S_B = 1.028 \cdot 10^{-4}$	2	$5.139 \cdot 10^{-5}$	6.560
Interakce (AB): $S_{AB} = 6.022 \cdot 10^{-5}$	4	$1.506 \cdot 10^{-5}$	1.922
Reziduální: $S_R = 7.050 \cdot 10^{-5}$	9	$7.833 \cdot 10^{-6}$	-
Celkový	17	-	-

$$F_{0.95}(2, 9) = 4.26 \text{ a } F_{0.95}(4, 9) = 3.63.$$

### Test:

1. Mají laboranti vliv na výsledek analýz zjistíme vyšetřením nulové hypotézy  $H_{01}: \alpha_i = 0$  a zároveň  $H_{02}: \tau_{ij} = 0$

2. Otestujeme  $H_0: \beta_j = 0$ , a sloučíme příspěvky  $S_A + S_{AB}$  s reziduálním součtem čtverců.

$$M_R^* = \frac{S_R + S_A + S_{AB}}{2 + 4 + 9} = \frac{1.688 \cdot 10^{-5}}{15} = 1.12 \cdot 10^{-5}$$

Testovací statistika  $F_B = M_B / M_R^* = 4.58$  je větší než  $F_{0.95}(3, 15) = 3.68$  a  $H_0$  je zamítnuta. Vliv faktoru B (přístroje) na výsledek analýzy je na hladině  $\alpha = 0.05$  významný. )

Střední hodnota průměrného čtverce  $M_B$

$$E(M_B) = \sigma^2 + 6\sigma_B^2$$

Pro odhad přístrojové chyby platí

$$\hat{\sigma}_B^2 + \frac{M_B - \hat{\sigma}^2}{6} = 6.68 \cdot 10^{-6}$$

### Závěr:

Na přesnost stanovení diethylenglykolu má statisticky významný vliv pouze použitý chromatograf.

Variabilita způsobená laboranty je  $\hat{\sigma}^2 = 1.12 \cdot 10^{-5}$ ,  
variabilita způsobená přístroji je  $\hat{\sigma}_B^2 = 6.68 \cdot 10^{-6}$ .

$$S_{PA} = \frac{S_A + S_{AB}}{2 + 4} = 1.63 \cdot 10^{-5}$$

a testovací statistika

$$F_{PA} = \frac{1.63 \cdot 10^{-5}}{7.83 \cdot 10^{-6}} = 2.09$$

Jelikož  $F_{0.95}(6, 9) = 3.373$  je větší než statistika  $F_{PA}$ , nemají laboranti významný vliv na výsledek analýz a model ANOVA lze vyjádřit rovnicí

$$y_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

## Nevyvážené modely

V (i, j)-té cele je  $n_{ij}$  pozorování

**Přibližný rozklad celkového součtu čtverců**

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{n_k} y_{ijk}$$

pro všechny cely.

**Reziduální součet čtverců**

$$S_R = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{n_k} (y_{ijk} - \hat{\mu}_{ij})^2$$

Pro výpočet dalších složek rozkladu celkového součtu čtverců se používá  $\hat{\mu}_{ij}$ :

Jsou určeny z ekvivalentního počtu  $n^*$

$$n^* = \left[ \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{1}{n_{ij}} \right]^{-1}$$

$$S_A = n^* M \sum_{i=1}^N (\hat{\mu}_i - \hat{\mu})^2$$

s  $(N - 1)$  stupni volnosti

$$S_B = n^* N \sum_{j=1}^M (\hat{\mu}_j - \hat{\mu})^2$$

s  $(M - 1)$  stupni volnosti

— TESTOVÁNÍ: —

$$(1) H_0: \alpha_i = 0 \quad \text{vs.} \quad H_A: \alpha_i \neq 0$$

$$H_0: \beta_j = 0 \quad \text{vs.} \quad H_A: \beta_j \neq 0$$

$$(2) F_A = MS_A / MS_R; \quad F_B = MS_B / MS_R; \quad F_{AB} = MS_{AB} / MS_R$$

(3) kvantil F-rozdělení:

$$\text{pro A: } F_{1-\alpha} [(N-1); (N-1)(M-1)]$$

$$\text{pro B: } F_{1-\alpha} [(M-1); (N-1)(M-1)]$$

$$\text{pro AB: } F_{1-\alpha} [1; (N-1)(M-1)]$$

(4) Rozhodování:  $F_{\text{exp}} \leq F_{\text{krit}}$  pak  $H_0$  přijata

$$S_{AB} = n^* \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\hat{\mu}_{ij} - \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j + \hat{\mu})^2$$

s  $(N - 1)(M - 1)$  stupni volnosti.

Je použito

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{\mu}_{ij} \quad \hat{\mu}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_{ij} \quad \hat{\mu} = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \hat{\mu}_{ij}$$

Testování hypotéz: stejně jako u vyvážených experimentů.

## Úlohy k procvičení analýzy rozptylu v NCSS2000 a ADSTAT

M. Meloun, J. Militký:

Kompendium statistického zpracování dat,  
Karolinum Praha 2012

# Program ADSTAT 1.25

## Úloha H5.02 Vliv druhu svářecího kovu na pevnost svaru (ANOVA2P)

Vazebným pojtkem svaru zirkoniové slitiny bývá nikl, železo a měď. Byly vytvořeny svary o rozličném složení těchto svářecích komponent a cílem je vyšetřit pevnost svaru, tzn. největší tlak v tisících liber na čtvereční palec k přerušení svaru. Na sedmi svarech A1 až A7 (faktor A) a hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  vyšetřete, zda záleží na druhu kovu B1 až B3 (faktor B), užitého ve svářecím drátu, zda tlaky k přerušení svaru jsou u všech drátů stejné. Prozkoumejte, zda je třeba provést transformaci vedoucí ke stabilizaci rozptylu. Ovlivnil některý kov odlišně pevnost svaru ve srovnání s ostatními kovy? Existuje statisticky významná interakce obou faktorů a má logický smysl?

**Data:** Tlak k roztržení svaru zirkonové slitiny [ $10^3$  liber/palec<sup>2</sup>] pro sedm svarů A1 až A7 a tři druhy svářecích drátů B1 až B3. (1 libra = 0.45 kg, 1 palec = 2.54 cm).

Svár	B1 (Nikl)	B2 (Železo)	B3 (Měď)
A1	67.0	71.9	72.2
...	...	...	...
A7	75.6	84.9	69.0

### (3) TABULKA ANOVA PRO MODEL S TUKEYHO INTERAKCÍ:

H<sub>0</sub>: Efekty faktoru A jsou nulové, H<sub>A</sub>: ... nejsou nulové  
 Kvantil F(1-alfa,n-1,mn-m-n) = 3.095  
 H<sub>0</sub>: Efekty faktoru B jsou nulové, H<sub>A</sub>: ... nejsou nulové  
 Kvantil F(1-alfa,m-1,mn-m-n) = 3.982  
 H<sub>0</sub>: Interakce I je nulová, H<sub>A</sub>: ... není nulová  
 Kvantil F(1-alfa,1,mn-m-n) = 4.844  
 (Zde I znamená efekt Tukeyho interakce.)

Zdroj rozptylu	Stupně volnosti	Součet čtverců	Průměrný čtverec	Testovací kritérium	Závěr H <sub>0</sub> je	Spočtená hlad.výz.
Mezi úrovněmi A	n-1 = 6	2.6829E+02	4.4715E+01	3.952	Zamítnuta	0.024
Mezi levels B	m-1 = 2	1.3190E+02	6.5951E+01	5.829	Zamítnuta	0.019
Interakce *	1	3.9517E+01	3.9517E+01	3.493	Akceptována	0.088
Rezidua	mn-m-n = 11	1.2446E+02	1.1314E+01			
Celkový	mn-1 = 20	5.2465E+02	2.6232E+01			

### (4) TRANSFORMACE:

Odhad mocninné transformace : -1.0086E+01  
 Rozptyl odhadu transformace : 3.2258E+01  
 Akceptovatelný interval : (-1.5766E+01,-4.4066E+00)

## ANALÝZA ROZPTYLU

ANOVA pro dvojné třídění s pevnými efekty bez opakování pozorování  
 Název: h502

### VSTUP

(1) DATA A PODMÍNKY:  
 Hladina významnosti alfa : 0.050  
 Transformace : Ne  
 Metoda analýzy : Nejmenší čtverce  
 Jméno výstupního souboru : H502.TXT

### (2) POZOROVÁNÍ NA RŮZNÝCH ÚROVNÍCH FAKTORŮ A, B:

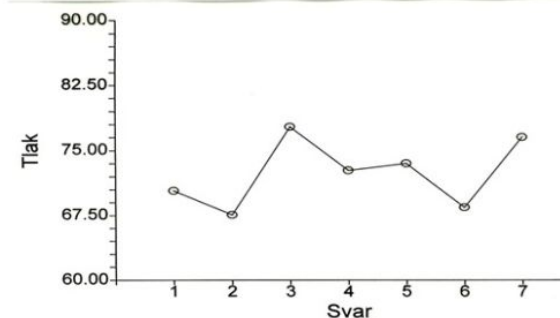
Úrovně faktoru A	Úrovně faktoru B		
	1	2	3
1	6.7000E+01	7.1900E+01	7.2200E+01
2	6.7500E+01	6.8800E+01	6.6400E+01
3	7.6000E+01	8.2600E+01	7.4500E+01
4	7.2700E+01	7.8100E+01	6.7300E+01
5	7.3100E+01	7.4200E+01	7.3200E+01
6	6.5800E+01	7.0800E+01	6.8700E+01
7	7.5600E+01	8.4900E+01	6.9000E+01

### VÝSTUP

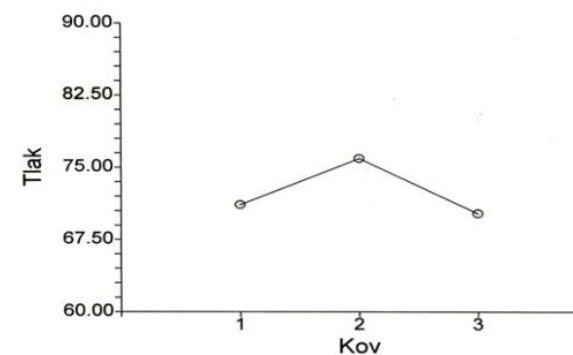
(1) PRŮMĚRY A EFEKTY ÚROVNÍ:  
 Celkový průměr = 7.2395E+01  
 Residuální rozptyl = 1.1314E+01

FAKTOR A:			FAKTOR B:		
Úroveň	Průměr	Efekt	Úroveň	Průměr	Efekt
1	7.0367E+01	-2.0286E+00	1	7.1100E+01	-1.2952E+00
2	6.7567E+01	-4.8286E+00	2	7.5900E+01	3.5048E+00
3	7.7700E+01	5.3048E+00	3	7.0186E+01	-2.2095E+00
4	7.2700E+01	3.0476E-01			
5	7.3500E+01	1.1048E+00			
6	6.8433E+01	-3.9619E+00			
7	7.6500E+01	4.1048E+00			
Tukeyho C = 1.5313E-01					

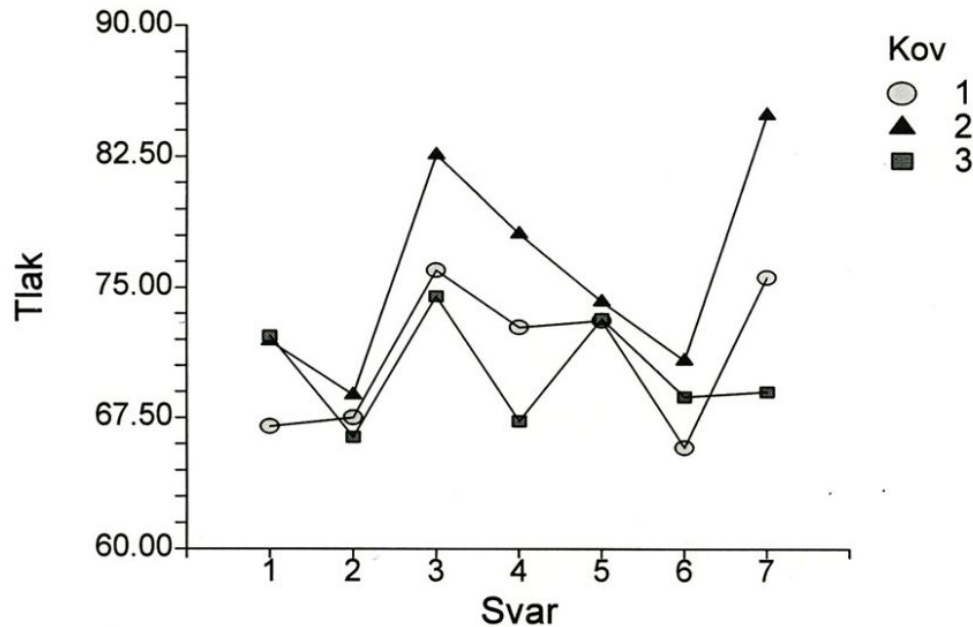
Means of Tlak



Means of Tlak



## Means of Tlak



## Program QCEXPERT

### Tabulka ANOVA

Zdroj variability	Součet čtv.	Průměrný čtv.	Df	Směr. odch.	F-kritérium	Krit. kvantil	Závěr	p-hodnota
H502f1	268,2895238	44,71492063	6	6,686921611	4,311290002	2,996120377	Významný	0,01508686979
H502f2	131,9009524	65,95047619	2	8,120989853	6,358764023	3,885293835	Významný	0,01309354553
Interakce	39,51662801	39,51662801	1	11,15612153	5,117383166	4,844335675	Významný	0,04492122529
Rezidua	84,94241961	7,722038146	11	2,778855546				
Celkem	524,6495238	26,23247619	20	5,121764949				

## Program NCSS2007

### Úloha B5.01 Vliv analytické laboratoře na stanovení albuminu v lidském séru (ANOVA1)

Standardní vzorek lidského séra obsahuje 42.0 g albuminu v 1 litru. Pět laboratoří A1 až A5 (faktor A) provedlo analytické stanovení při šesti opakovaných analýzách v jednom dni (str. 31 v cit.<sup>14</sup>). Posuďte, zda se výsledky z laboratoří významně liší. Dosáhla některá laboratoř odlehklých výsledků? Komentujte také správnost stanovení v jednotlivých laboratořích pomocí intervalového odhadu. Jak posoudíme jednotlivé zdroje variability?

**Data:** Obsah určeného albuminu [g · l<sup>-1</sup>] v pěti laboratořích, A1 až A5.

Úroveň			Opakovatelnost			
A1	42.5	41.6	42.1	41.9	41.1	42.2
...	...	...	...	...	...	...
A5	42.2	41.6	42.0	41.8	42.6	39.0

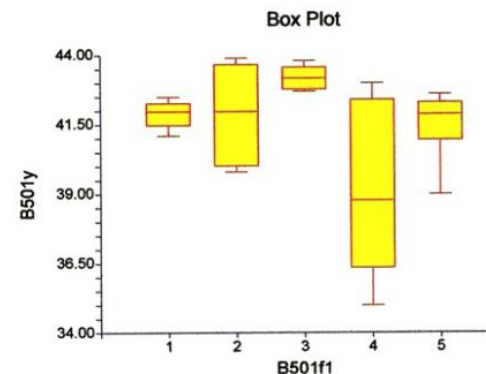


### Analysis of Variance Report

Page/Date/Time 1 30.1.2003 9:35:44  
 Database D:\Program Files\NCSS2001\Data\5kap\B5.S0  
 Response B501y

#### Tests of Assumptions Section

Assumption	Test Value	Prob Level	Decision (0.05)
Skewness Normality of Residuals	-0.2974	0.766172	Accept
Kurtosis Normality of Residuals	1.3173	0.187744	Accept
Omnibus Normality of Residuals	1.8237	0.401787	Accept
Modified-Levene Equal-Variance Test	9.0090	0.000120	Reject



### Expected Mean Squares Section

Source	DF	Term	Denominator	Expected
Term		Fixed?	Term	Mean Square
A: B501f1	4	Yes	S(A)	S+sA
S(A)	25	No		S(A)

Note: Expected Mean Squares are for the balanced cell-frequency case.

### Analysis of Variance Table

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: B501f1	4	53.80533	13.45133	4.32	0.008586*	0.874208
S(A)	25	77.85333	3.114133			
Total (Adjusted)	29	131.6587				
Total	30					

\* Term significant at alpha = 0.05

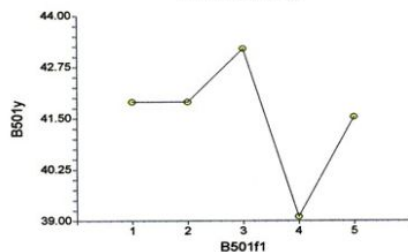
### Kruskal-Wallis One-Way ANOVA on Ranks

#### Hypotheses

Ho: All medians are equal.

Ha: At least two medians are different.

Means of B501y



## Program NCSS2007

### Úloha B5.03 Vliv doby skladování na stanovený obsah riboflavinu (ANOVA1)

V rámci stabilitních testů u dražé B-komplexu bylo provedeno stanovení obsahu riboflavinu u jedné výrobní šarže ve třech různých časech (faktor A), a to A1 finální výstup po ukončení výroby, dále A2 po jednom měsíci a konečně A3 po půl roce při skladovacích teplotách do 25 EC. Stanovení bylo provedeno vždy stejným postupem metodou HPLC, a to na stejném zařízení. Ověřte, zda doba skladování měla významný vliv na obsah sledovaného riboflavinu. Liší se významně obsah riboflavinu v určitém čase od ostatních? Považujte finální výstup A1 za kontrolní a testujte, zda se zbývající dva časové úseky A2 a A3 liší od kontrolního A1.

**Data:** Obsah stanoveného riboflavinu [mg/drg] u jedné šarže v různých časových obdobích: A1 značí finální výstup, A2 značí po 1 měsíci, A3 značí po 6 měsících.

A1	A2	A3
14.80	15.97	14.16
...	...	...
15.42	14.40	15.25



## Program QCEXPRT

Sloupec	Počet hodnot	Efekty faktorů	Průměr úrovně
1	6	0,373333333333333	41,9
2	6	0,373333333333333	41,9
3	6	1,67333333333333	43,2
4	6	-2,42666666666667	39,1
5	6	6,66666666666667E-03	41,5333333333333

Test významnosti celkového vlivu faktorů :

Závěr	Teoretický	Vypočítaný	Pravděpodobnost
Významný	2,75871047	4,319446823	0,008585691663

Párové porovnávání dvojic úrovní

Scheffého metoda

Dvojice	Rozdíl	Významnost	Pravděpodobnost
1 - 2	0	Nevýznamný	1
1 - 3	-1,3	Nevýznamný	0,8018043024
1 - 4	2,8	Nevýznamný	0,1438805889
1 - 5	0,3666666667	Nevýznamný	0,9978454917
2 - 3	-1,3	Nevýznamný	0,8018043024
2 - 4	2,8	Nevýznamný	0,1438805889
2 - 5	0,3666666667	Nevýznamný	0,9978454917
3 - 4	4,1	Významný	0,01150040653
3 - 5	1,666666667	Nevýznamný	0,619561604
4 - 5	-2,433333333	Nevýznamný	0,2545199375

### Analysis of Variance Report

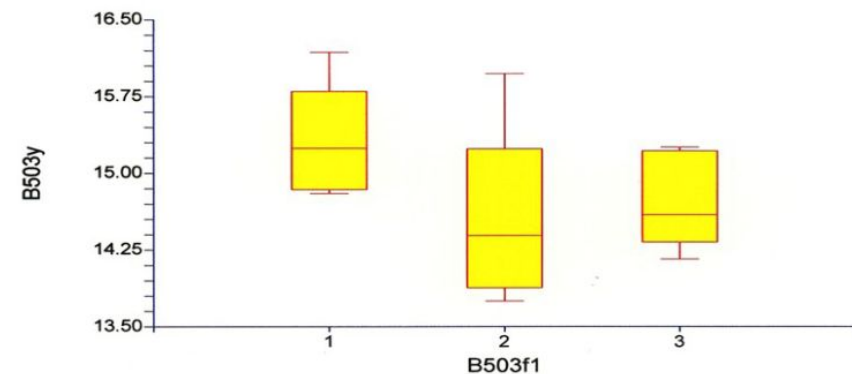
Page/Date/Time	1 30.1.2003 10:15:44
Database	D:\Program Files\NCSS2001\Data\5kap\B5.S0
Response	B503y

### Tests of Assumptions Section

Assumption	Test Value	Prob Level	Decision (0.05)
Skewness Normality of Residuals	1.8702	0.061461	Accept
Kurtosis Normality of Residuals	1.0354	0.300462	Accept
Omnibus Normality of Residuals	4.5697	0.101791	Accept
Modified-Levene Equal-Variance Test	0.2506	0.782271	Accept

### Box Plot Section

Box Plot



### Expected Mean Squares Section

Source	Term	DF	Term Fixed?	Denominator Term	Expected Mean Square
A: B503f1		2	Yes	S(A)	S+sA
S(A)		12	No		S(A)

Note: Expected Mean Squares are for the balanced cell-frequency case.

### Analysis of Variance Table

Source	Term	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: B503f1		2	1.629	0.8145	1.93	0.187372	0.322593
S(A)		12	5.05976	0.4216467			
Total (Adjusted)		14	6.68876				
Total		15					

\* Term significant at alpha = 0.05

### Kruskal-Wallis One-Way ANOVA on Ranks

#### Hypotheses

Ho: All medians are equal.

Ha: At least two medians are different.

#### Test Results

Method	DF	Chi-Square (H)	Prob Level	Decision(0.05)
Not Corrected for Ties	2	4.535	0.103571	Accept Ho
Corrected for Ties	2	4.543113	0.103152	Accept Ho

Number Sets of Ties 1  
Multiplicity Factor 6

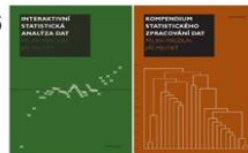
## Program NCSS2007

### Úloha B5.04 Vliv druhu biologického materiálu na obsah vanadu (ANOVA1)

Vanad byl sledován důležitým biogenním prvkem. Byl sledován v biologickém materiálu metodou izotopového zředování hmotovou spektrometrií. Data přináší obsah vanadu v ng/g vysušeného biologického materiálu (faktor A), a to A1 v tkáni ústřice, A2 v listech citrusů, A3 v hovězích játrech a A4 v lidském séru. Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  vyšetřete, zda se významně liší obsah vanadu dle druhu biologického materiálu nebo zda je všude stejný? Jaký je rozdíl mezi střední hodnotou obsahu vanadu v tkáni ústřice a citrusovými listy? Jaká je střední hodnota obsahu vanadu v lidském séru?

**Data:** Obsah vanadu [ng/g] v rozličném biologickém materiálu: A1 značí tkáň ústřice, A2 značí listy citrusů, A3 značí hovězí játra, A4 značí lidské sérum.

A1	A2	A3	A4
2.35	2.32	0.39	0.1
...	...	...	...
-	-	-	0.16



## Program QCEXPRT

Celkový průměr :	14,856
Celkový rozptyl :	0,4777685714
Průměrný čtverec :	0,4459173333
Reziduální rozptyl :	0,4216466667
Reziduální součet čtverců :	5,05976
Celkový součet čtverců :	6,68876
Vysvětlený součet čtverců :	1,629

Sloupec	Počet hodnot	Efekty faktorů	Průměr úrovně
1	5	0,4500000000000001	15,306
2	5	-0,33	14,526
3	5	-0,1199999999999999	14,736

Test významnosti celkového vlivu faktoru :	Závěr	Teoretický	Vypočítaný	Pravděpodobnost
Nevýznamný		3,885293835	1,931712176	0,1873724885

#### Párové porovnávání dvojic úrovní

Scheffého metoda	Rozdíl	Významnost	Pravděpodobnost
Srovnávaná dvojice			
1 - 2	0,78	Nevýznamný	0,2065966096
1 - 3	0,57	Nevýznamný	0,4093160603
2 - 3	-0,21	Nevýznamný	0,8786809395

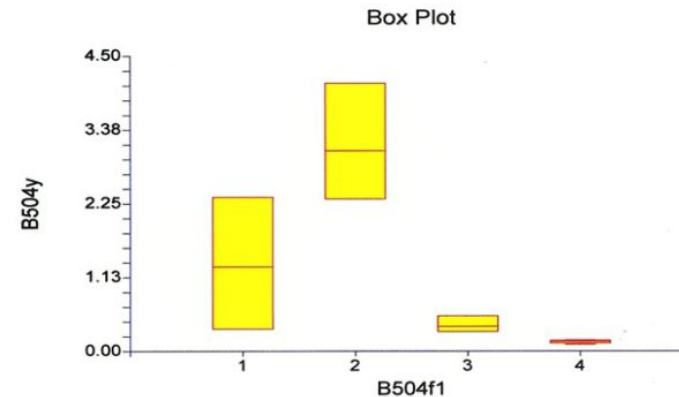
### Analysis of Variance Report

Page/Date/Time 1 30.1.2003 10:12:33  
Database D:\Program Files\NCSS2001\Data\5kap\B5.S0  
Response B504y

#### Tests of Assumptions Section

Assumption	Test Value	Prob Level	Decision (0.05)
Skewness Normality of Residuals	0.3242	0.745760	Accept
Kurtosis Normality of Residuals	1.2001	0.230103	Accept
Omnibus Normality of Residuals	1.5454	0.461775	Accept
Modified-Levene Equal-Variance Test	3.2143	0.070112	Accept

#### Box Plot Section



### Expected Mean Squares Section

Source	DF	Term Fixed?	Denominator Term	Expected Mean Square
A: B504f1	3	Yes	S(A)	S+sA
S(A)	10	No	S(A)	S(A)

Note: Expected Mean Squares are for the balanced cell-frequency case.

### Analysis of Variance Table

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: B504f1	3	18.86832	6.289439	17.31	0.000276*	0.999414
S(A)	10	3.63252	0.363252			
Total (Adjusted)	13	22.50084				
Total	14					

\* Term significant at alpha = 0.05

### Kruskal-Wallis One-Way ANOVA on Ranks

#### Hypotheses

Ho: All medians are equal.

Ha: At least two medians are different.

#### Test Results

Method	DF	Chi-Square (H)	Prob Level	Decision(0.05)
Not Corrected for Ties	3	11.17143	0.010834	Reject Ho
Corrected for Ties	3	11.19604	0.010712	Reject Ho
Number Sets of Ties	1			
Multiplicity Factor	6			

## Program NCSS2007

### Úloha B5.10 Vliv alkoholu a věku na reakční čas řidiče (ANOVA2B)

Vyšetřete vliv věku řidiče A1 až A3 (faktor A) a množství vypitého alkoholu B1 až B3 (faktor B) na reakční čas řidiče v sekundách, když každé měření bylo 3× opakováno. Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  vyšetřete, zda oba faktory mají významný vliv na reakční čas řidiče a zda existuje statisticky významná interakce mezi věkem řidiče a vlivem alkoholu. Vezměte první sloupec reakčního času bez alkoholu B1 za kontrolní a porovnejte s ním zbývající dva sloupce B2 a B3. Jsou zde statisticky významné rozdíly? Lze použít transformaci dat v případě nenormality? U vícefaktorové analýzy rozptylu ANOVA vysvětlete efekt interakce. Uveďte, co to jsou modely se smíšenými efekty a co vyvážené a nevyvážené experimenty?

**Data:** Reakční čas [s] v závislosti na věku řidiče A1 až A3 a vlivu alkoholu B1 až B3.

Věk	B1 (Žádný alkohol)			B2 (1 sklenička)			B3 (2 skleničky)		
A1 (20 - 39 let)	0.42	0.43	0.41	0.47	0.46	0.46	0.65	0.66	0.68
A3 (60 a více let)	0.57	0.58	0.57	0.73	0.73	0.72	0.79	0.80	0.80

## Program QCEXPRT

Celkový průměr :	1,2615
Celkový rozptyl :	1,758181654
Průměrný čtverec :	1,63259725
Reziduální rozptyl :	0,363252
Reziduální součet čtverců :	3,63252
Celkový součet čtverců :	22,8563615
Vysvětlený součet čtverců :	19,2238415

Počet úrovní faktoru :	4	Efekty faktorů	Průměr úrovně
Sloupec	Počet hodnot		
1	3	0,0685	1,33
2	3	1,8985	3,16
3	3	-0,8515	0,41
4	5	-1,1155	0,146

Test významnosti celkového vlivu faktoru :

Závěr	Teoretický	Vypočítaný	Pravděpodobnost
Významný	3,708264819	17,64050072	0,0002556300788

Párové porovnávání dvojic úrovní

Scheffého metoda	Rozdíl	Významnost	Pravděpodobnost
Srovnávaná dvojice			
1 - 2	-1,83	Významný	0,02838587166
1 - 3	0,92	Nevýznamný	0,3708896984
1 - 4	1,184	Nevýznamný	0,1275226957
2 - 3	2,75	Významný	0,002029480209
2 - 4	3,014	Významný	0,000419640171
3 - 4	0,264	Nevýznamný	0,9462971147

### Analysis of Variance Report

Page/Date/Time	1 30.1.2003 10:26:23
Database	D:\Program Files\NCSS2001\Data\5kap\B5.S0
Response	B510y

### Expected Mean Squares Section

Source	DF	Term Fixed?	Denominator Term	Expected Mean Square
A: B510f1	2	No	AB	S+sAB+bsA
B: B510f2	2	No	AB	S+sAB+asB
AB	4	No	S	S+sAB
S	18	No	S	S

Note: Expected Mean Squares are for the balanced cell-frequency case.

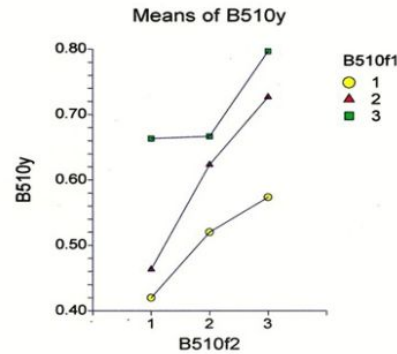
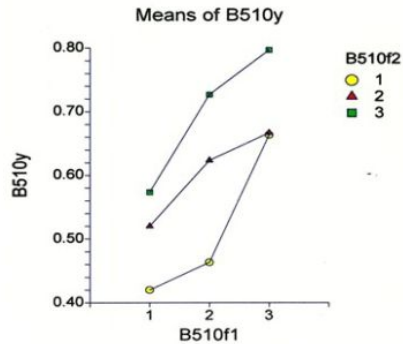
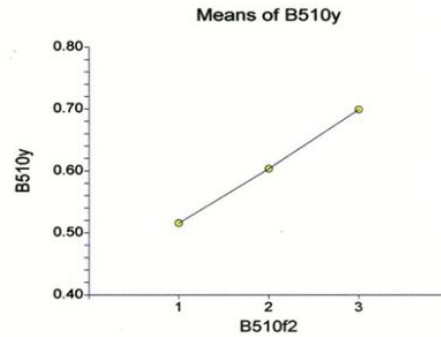
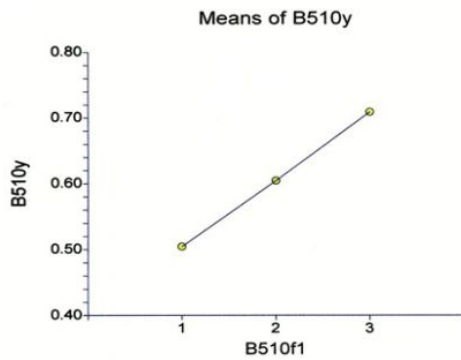
### Analysis of Variance Table

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: B510f1	2	0.1881185	9.405926E-02	14.86	0.014079*	
B: B510f2	2	0.1513407	7.567037E-02	11.95	0.020550*	
AB	4	2.532593E-02	6.331482E-03	77.70	0.000000*	
S	18	1.466667E-03	8.148148E-05			
Total (Adjusted)	26	0.3662519				
Total	27					

\* Term significant at alpha = 0.05



# Program QCEXPERT



Tabulka ANOVA

Zdroj	Součet čtv.	Průměrný čtverec	Df	Směr. odch.	F-kritérium	Kritický kvantil	Závěr	p-hodnota
B510f1	0,1881185185	0,09405925926	2	0,3066908203	1154,363636	3,554557146	Významný	9,925290386E-020
B510f2	0,1513407407	0,07567037037	2	0,2750824792	928,6818182	3,554557146	Významný	6,913263805E-019
Interakce	0,02532592593	0,006331481481	4	0,07957060689	77,70454545	2,927744173	Významný	4,196705971E-011
Rezidua	0,001466666667	8,148148148E-005	18	0,009026709338				
Celkem	0,3662518519	0,01408660969	26	0,1186870241				

## Program NCSS2007

### Úloha B5.14 Vliv druhu anesteze a typu psa na koncentraci adrenalinu v krvi (ANOVA2P).

U 10 psů B1 až B10 byla měřena koncentrace adrenalinu pod anestezí plynými anestetiky A1 isofluoranem, A2 halothanem a A3 cyklopropanem. Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  vyšetřete, zda druh anestetika (faktor A) ovlivní výslednou koncentraci adrenalinu v ng/ml krve a zda tuto koncentraci ovlivní i typ vyšetřovaného psa (faktor B). Lze uvažovat také interakci obou faktorů? Porovnejte koncentraci adrenalinu u jednotlivých psů a nalezněte odlehlého jedince. Lze nalézt i anestetikum odlehlých vlastností?

**Data:** Koncentrace adrenalinu v krvi [ng/ml] po 3 anestetikách A1 až A3 pro 10 druhů psů B1 až B10.

Anestet.	Druh psa									
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
A1 (Isofluoran)	0.28	0.51	1.00	0.39	0.29	0.36	0.32	0.69	0.17	0.33
A2 (Halothan)	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
A3 (Cyklopropan)	1.07	1.35	0.69	0.28	1.24	1.53	0.49	0.56	1.02	0.30

### Analysis of Variance Report

Page/Date/Time 1 30.1.2003 10:18:19  
 Database D:\Program Files\NCSS2001\Data\5kap\B5.S0  
 Response B514y

#### Expected Mean Squares Section

Source	DF	Term	Denominator	Expected Mean Square
A: B514f1	9	No	AB	S+sAB+bsA
B: B514f2	2	No	AB	S+sAB+asB
AB	18	No	S	S+sAB
S	0	No	S	S

Note: Expected Mean Squares are for the balanced cell-frequency case.

#### Analysis of Variance Table

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: B514f1	9	0.5169467	5.743852E-02	0.47	0.877191	
B: B514f2	2	1.080807	0.5404033	4.41	0.027703*	
AB	18	2.207793	0.1226552			
S	0	0				
Total (Adjusted)	29	3.805547				
Total	30					

\* Term significant at alpha = 0.05

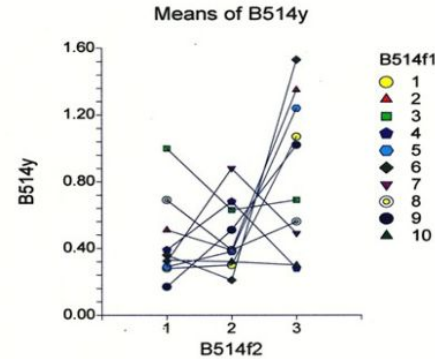
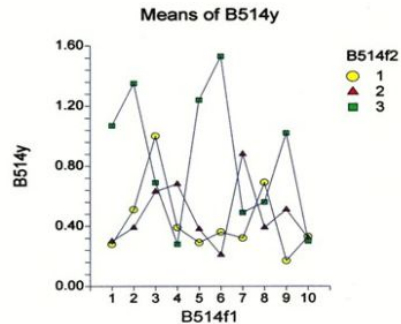
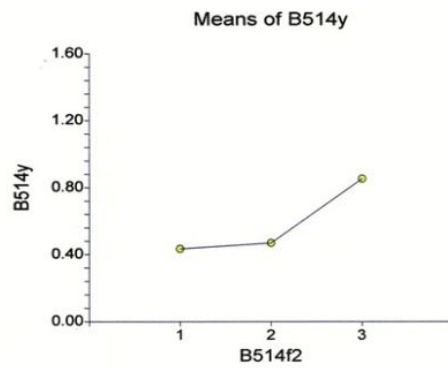
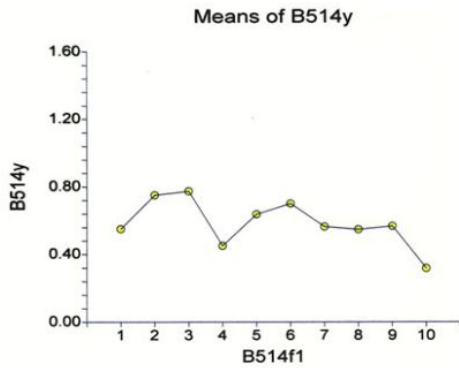




# Program QCEXPERT

## Tabulka ANOVA

Zdroj	Součet čtv.	Prům. čtverec	Df	Směr. odch.	F-kritérium	Kritický kvantil	Závěr	p-hodnota
B514f1	0,5169466667	0,05743851852	9	0,2396633441	0,468292624	2,510343858	Nevýznamný	0,8668209016
B514f2	1,060806667	0,5404033333	2	0,7351213052	4,405874342	3,554557146	Významný	0,02770296711
Interakce	0,3625140182	0,3625140182	1	1,485864507	3,339731963	4,451321772	Nevýznamný	0,08523292839
Rezidua	1,845279315	0,1085458421	17	0,3294629601				
Celkem	3,805546667	0,1312257471	29	0,362250945				



# Program NCSS2007

## Úloha B5.17 Vliv dvou faktorů zařazení ve společnosti na krevní tlak jedince (ANOVA2U).

Uvažujme hypotetickou studii, týkající se vlivu rychlých kulturních změn domorodců na ostrově v Mikronésii, na hladinu jejich systolického krevního tlaku. Krevní tlak byl měřen náhodnému vzorku 30 mužů starších 40 let, kteří pracují v hlavním městě. Těmto osobám byl předložen sociologický dotazník, ze kterého vyšlo jejich sociální zařazení do prozápadní společnosti (faktor A), ale také citění dle svých tradic a vlastní kultury (faktor B). Jedinci byli charakterizováni hodnotou svého krevního tlaku. Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  vyšetřete, zda jsou oba faktory statisticky významné ve vlivu na systolický krevní tlak.

**Data:** Hodnota systolického krevního tlaku domorodců [mm Hg sloupce] dle jejich sociálního zařazení A1 až A3 a dle jejich kultury a tradice B1 až B3.

Hodnocení dle jejich kultury	Hodnocení dle jejich tradice		
	B1 (Vysoké)	B2 (Střední)	B3 (Nízké)
A1 (Vysoké)	130 140 135	150 145	175 160 170 165 155
...	...	...	...
A3 (Nízké)	180 160 145	155 140 135	125 130 110

## Analysis of Variance Report

Page/Date/Time 1 30.1.2003 10:21:37  
 Database D:\Program Files\NCSS2001\Data\5kap\B5.S0  
 Response B517y

### Expected Mean Squares Section

Source	Term	DF	Fixed?	Denominator	Expected Mean Square
A: B517f1	AB	2	No	AB	S+sAB+bsA
B: B517f2	AB	2	No	AB	S+sAB+asB
AB	S	4	No	S	S+sAB
S		21	No		S

Note: Expected Mean Squares are for the balanced cell-frequency case.

### Analysis of Variance Table

Source	Term	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: B517f1		2	33.1226	16.5613	0.02	0.985010	
B: B517f2		2	687.7203	343.8602	0.31	0.746526	
AB		4	4369.693	1092.423	14.41	0.000008*	
S		21	1592.5	75.83334			
Total (Adjusted)		29	7336.667				
Total		30					

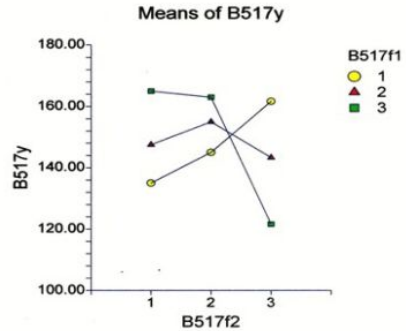
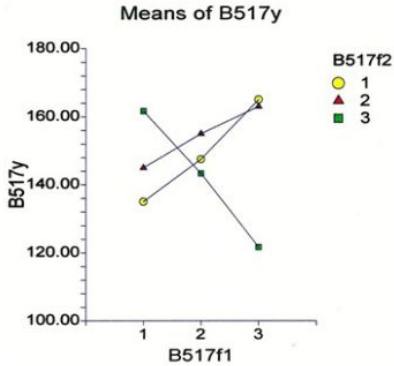
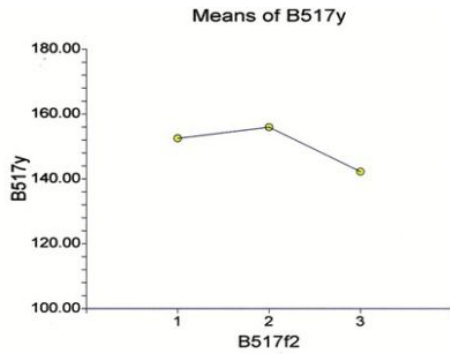
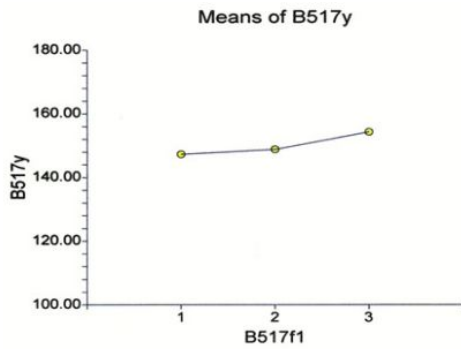
\* Term significant at alpha = 0.05



# Program QCEXPERT

## Tabulka ANOVA

Zdroj	Součet čtv.	Průměrný čtv.	Df	Směr. odch.	F-kritérium	Kritický kvantil	Závěr	p-hodnota
B517f1	33,12260536	16,56130268	2	4,069558045	0,1975916804	3,521893261	Nevýznamný	0,8223699954
B517f2	687,7203065	343,8601533	2	18,54346659	4,102570117	3,521893261	Významný	0,03303505273
Interakce	4369,693487	1092,423372	4	33,05182857	13,03362264	2,895107308	Významný	2,847406032E-005
Rezidua	1592,5	83,81578947	19	9,155096366				
Celkem	7468,034979	276,5938881	27	16,63111205				



# Program NCSS2007

## Úloha B5.28 Vliv kadmia a kyseliny fytinové na koncentraci železa v játrech potkanů (ANOVA2B)

Laboratorním potkanům bylo v potravě aplikováno kadmium a kyselina fytinová. Kadmium bylo podáváno v dietě ve dvou úrovních: A1 bez kadmia a A2 s přísadkou kadmia (faktor A). Kyselina fytinová byla aplikována ve třech úrovních: B1 nízké, B2 střední a B3 vysoké (faktor B). Protože došlo v průběhu experimentu k úhynu 6 potkanů, nejsou počty měření pro jednotlivé kombinace úrovní stejné. Hodnoty naměřené koncentrace železa v játrech [mg/kg] jsou v datech.

**Data:** Obsah železa v játrech [mg/kg] při hladinách kadmia A1 a A2 a kyseliny fytinové B1 až B3.

Kadmium v potravě	Hladina kyseliny fytinové v potravě										
	B1 (Nízká)			B2 (Střední)			B3 (Vysoká)				
A1 (0)	102.34	92.90	92.15	91.61	83.19	92.63	79.12	108.25	84.31	88.67	130.02
	123.88	117.71	95.26	96.94	112.50	122.21	58.53	104.91	104.65	117.09	100.50
A2 (1)	68.62	88.96	88.12	104.98	87.98	72.55	70.44	107.40	92.57	77.10	86.45
	105.38	96.47	70.01	107.20	74.34	106.93	55.00	98.22	126.84	95.05	98.98
					80.20						

## Analysis of Variance Report

Page/Date/Time 1 30.1.2003 10:28:44  
 Database D:\Program Files\NCSS2001\Data\5kap\B5.S0  
 Response B528x1

### Expected Mean Squares Section

Source	Term	DF	Fixed?	Denominator	Expected Mean Square
A: B528f1	AB	2	No	AB	S+sAB+bsA
B: B528f2	AB	1	No	AB	S+sAB+asB
AB	S	2	No	S	S+sAB
S	S	42	No	S	S

Note: Expected Mean Squares are for the balanced cell-frequency case.

### Analysis of Variance Table

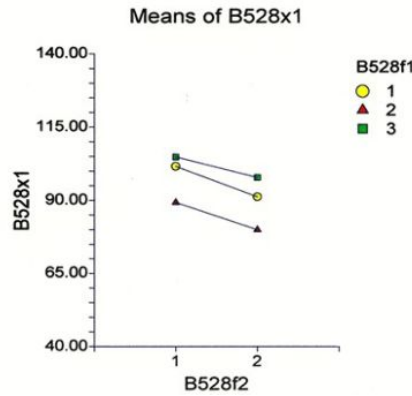
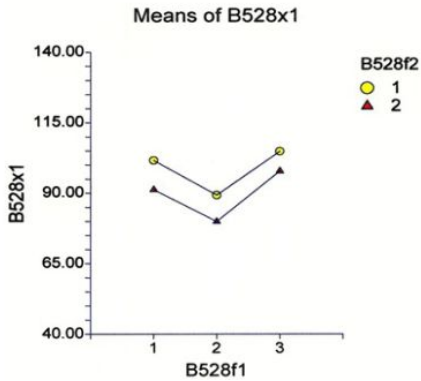
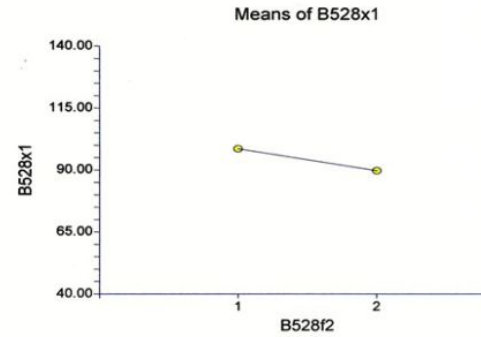
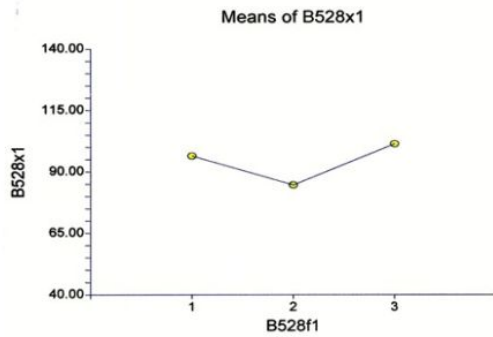
Source	Term	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: B528f1		2	2355.053	1177.527	96.81	0.010224*	
B: B528f2		1	948.8298	948.8298	78.01	0.012578*	
AB		2	24.32722	12.16361	0.05	0.951779	
S		42	10324.62	245.8242			
Total (Adjusted)		47	13652.83				
Total		48					

\* Term significant at alpha = 0.05



# Program QCEXPERT

Tabulka ANOVA									
Zdroj	Součet čtv.	Prům. čtv.	Df	Směr. odch.	F-kritérium	Kritický kvantil	Závěr	p-hodnota	
B528f1	2355,05355	1177,526775	2	34,31511001	4,790117174	3,219942293	Významný	0,01336858889	
B528f2	948,8297521	948,8297521	1	30,80308024	3,859789677	4,072653759	Nevýznamný	0,05609520073	
Interakce	24,32721667	12,16360833	2	3,487636497	0,04948092087	3,219942293	Nevýznamný	0,9517787107	
Rezidua	10324,61686	245,824211	42	15,67878219					
Celkem	13652,82738	290,485689	47	17,04364072					



# Program NCSS2007

## Úloha C5.15 Vliv teploty a času na množství odstraněné vody z papíru (ANOVA2B)

Množství odstraněné vody z papíru závisí na rychlosti papíru čili expozičním čase na válci A1 až A3 (faktor A) a na teplotě sušícího válce B1 až B3 (faktor B). Vyšetřete, zda oba faktory jsou statisticky významné a ovlivňují množství odstraněné vody. Vyšetření provedete na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$ . Jsou oba faktory v interakci?

**Data:** Množství odstraněné vody z papíru [%] pro expoziční časy A1 až A3 a různé teploty B1 až B3.

Čas [s]	B1 (100 °F)			B2 (120 °F)			B3 (140 °F)					
A1 (10 s)	24	26	21	25	33	33	36	32	45	49	44	45
A3 (30 s)	58	55	56	53	75	71	70	73	89	87	86	83

### Analysis of Variance Report

Page/Date/Time 1 30.1.2003 10:31:35  
 Database D:\Program Files\NCSS2001\Data\5kap\C5.S0  
 Response C515y

#### Expected Mean Squares Section

Source	Term	DF	Fixed?	Denominator Term	Expected Mean Square
A: C515f1	AB	2	No	AB	S+sAB+bsA
B: C515f2	AB	2	No	AB	S+sAB+asB
AB	S	4	No	S	S+sAB
S		27	No		S

Note: Expected Mean Squares are for the balanced cell-frequency case.

#### Analysis of Variance Table

Source	Term	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: C515f1		2	4376.722	2188.361	84.76	0.000531*	
B: C515f2		2	8200.389	4100.194	158.80	0.000155*	
AB		4	103.2778	25.81944	5.39	0.002522*	
S		27	129.25	4.787037			
Total (Adjusted)		35	12809.64				
Total		36					

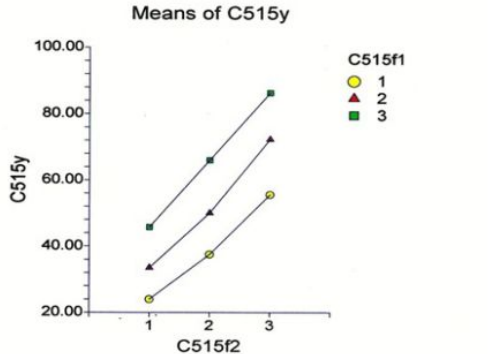
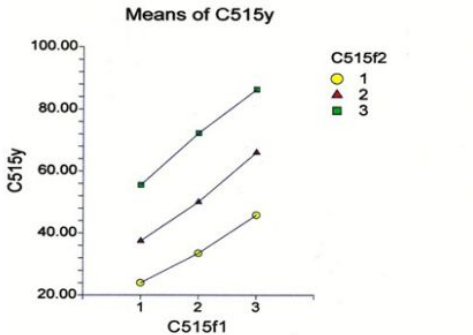
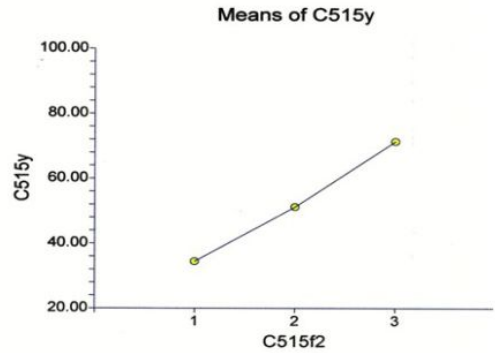
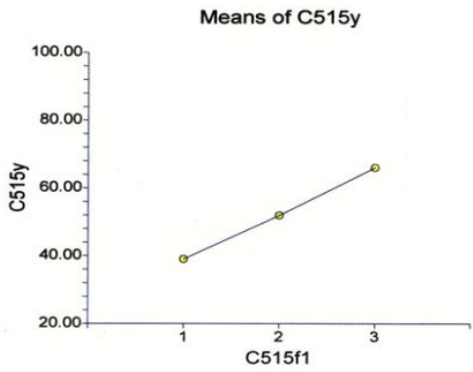
\* Term significant at alpha = 0.05



# Program QCEXPERT

## Tabulka ANOVA

Zdroj	Součet čtv.	Prům. čtv.	Df	Směr. odch.	F-kritérium	Kritický kvantil	Závěr	p-hodnota
C515f1	8200,388889	4100,194444	2	64,03276071	856,5203095	3,354130829	Významný	3,765816026E-025
C515f2	4376,722222	2188,361111	2	46,77992209	457,1431335	3,354130829	Významný	1,507188467E-021
Interakce	103,2777778	25,81944444	4	5,08128374	5,393617021	2,727765306	Významný	0,0025220604
Rezidua	129,25	4,787037037	27	2,187929852				
Celkem	12809,63889	365,9896825	35	19,13085682				



# Program NCSS2007

## Úloha H5.06 Vliv tří faktorů na množství popela v uhlí (ANOVA3B)

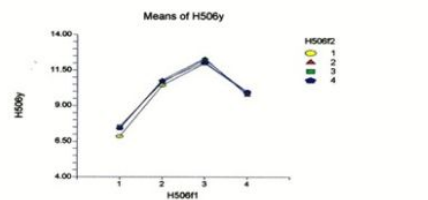
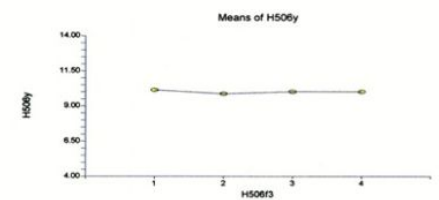
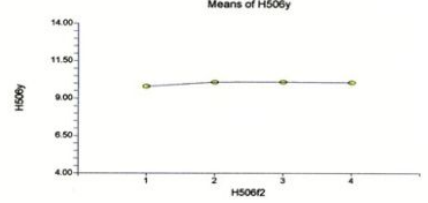
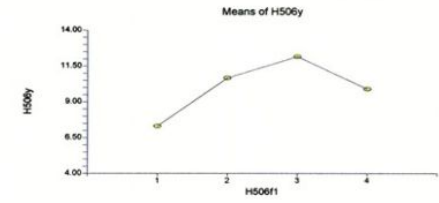
Tři faktory mají vliv na množství popela v uhlí, tj. maximální velikost částecek uhlí A1 až A4 (faktor A), druh uhlí B1 až B4 (faktor B), a velikost sledované navážky C1 až C4 (faktor C). Každý experiment byl 3× opakován. Sestrojte tabulku třífaktorové analýzy rozptylu. Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  testujte statistickou významnost jednotlivých faktorů. Existuje nějaká interakce mezi sledovanými faktory?

**Data:** Procento popela v uhlí pro maximální velikost částecek A1 až A4, pro různé druhy uhlí B1 až B4 a velikost navážky C1 až C4.

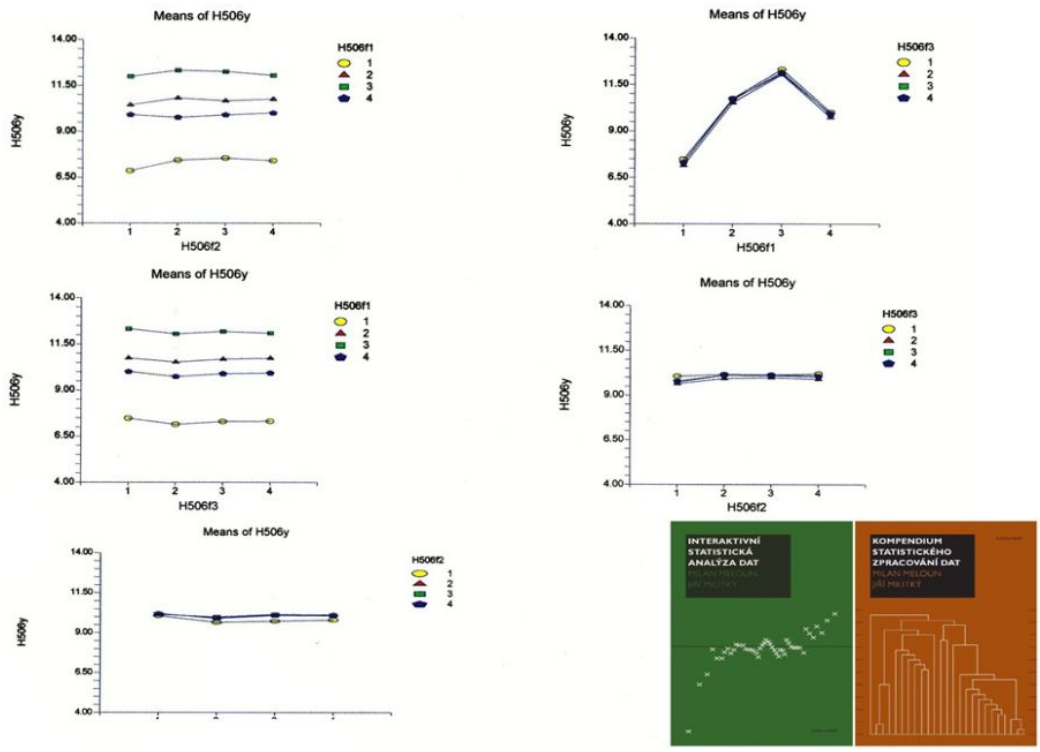
		B1 (uhlí Mojín)	B2 (uhlí Michel)	B3 (uhlí Kairan)	B4 (metalurgické uhlí)A1
(246 μm)	C1(1 g)	7.30 7.35 7.42	10.69 10.58 10.72	12.20 12.27 12.23	9.99 10.02 9.95
	C2 (100 mg)	6.84 6.07 6.91	10.26 10.35 10.42	11.85 11.85 12.05	9.45 9.86 9.78
	C3 (20 mg)	7.05 6.49 7.24	10.61 10.08 10.31	12.34 11.74 11.44	9.76 9.79 9.77
	C4 (5 mg)	6.75 5.62 7.24	10.66 10.61 10.01	12.22 11.68 12.09	9.92 10.17 10.50
A4 (48 μm)	C1 (1 g)	7.45 7.49 7.47	10.85 10.89 10.85	12.23 12.30 12.17	10.06 10.07 10.11
	C2 (100 mg)	7.15 7.68 7.18	10.37 10.79 10.71	11.52 12.17 11.82	9.71 9.86 9.78
	C3 (20 mg)	7.60 7.55 6.61	10.82 10.82 10.88	12.40 11.99 12.17	10.13 9.93 10.01
	C4 (5 mg)	8.06 7.05 7.57	11.26 10.56 10.31	11.96 11.87 12.06	10.01 9.98 9.84

## Analysis of Variance Report

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: H506f1	3	594.118	198.0393	613.94	0.000000*	
B: H506f2	3	2.761706	0.9205686	2.85	0.097140	
AB	9	2.903142	0.3225714	5.49	0.000002*	
C: H506f3	3	1.854081	0.6180269			
AC	9	0.2291339	2.545932E-02	0.40	0.926707	
BC	9	0.4888005	5.431117E-02	0.84	0.584332	
ABC	27	1.739643	6.443123E-02	1.10	0.353523	
S	128	7.5186	5.873906E-02			
Total (Adjusted)	191	611.613				
Total	192,					* Term significant at alpha = 0.05



# Program QCEXPERT



# Program NCSS2007

## Úloha C5.21 Vliv druhu operace a změkčovadla na prodloužení kaučuku (ANOVA2B)

U 48 vzorků surového kaučuku byl měřen modul prodloužení. Pro každý vzorek byla provedena tři měření. Vzorky pocházely ze 4 výrobních operací A1 až A4 (faktor A). Do každého vzorku byly přimíchány stanoveným způsobem 4 druhy změkčovadel B1 až B4 (faktor B). Cílem bylo zjistit, zda faktory A a B mají vliv na modul 700%ního prodloužení vzorku kaučuku.

**Data:** 700%ní prodloužení vzorku kaučuku [lb/sq inch], vzniklého ve 4 operacích A1 až A4 a za působení 4 druhů změkčovadla B1 až B4.

	Změkč. B1	Změkč. B2	Změkč. B3	Změkč. B4
<b>Operace A1</b>	211.0	196.0	200.0	323.0
	215.0	186.0	221.0	279.0
	197.0	190.0	198.0	251.0
<b>Operace A4</b>	229.0	198.0	196.0	273.0
	250.0	209.0	197.0	241.0
	238.0	221.0	186.0	221.0

### Analysis of Variance Report

Page/Date/Time 1 30.1.2003 10:33:40  
 Database D:\Program Files\NCSS2001\Data\5kap\C5.S0  
 Response C521y

Expected Mean Squares Section				
Source	DF	Term Fixed?	Denominator Term	Expected Mean Square
A: C521f1	3	No	AB	S+sAB+bsA
B: C521f2	3	No	AB	S+sAB+asB
AB	9	No	S	S+sAB
S	32	No		S

Note: Expected Mean Squares are for the balanced cell-frequency case.

Analysis of Variance Table						
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F-Ratio	Prob Level	Power (Alpha=0.05)
A: C521f1	3	24525.75	8175.25	11.84	0.001773*	
B: C521f2	3	1359.417	453.1389	0.66	0.598995	
AB	9	6212.75	690.3055	2.60	0.022453*	
S	32	8500	265.625			
Total (Adjusted)	47	40597.92				
Total	48					

\* Term significant at alpha = 0.05



# Program QCEXPERT

## Tabulka ANOVA

Zdroj	Součet čtv.	Prům. čtv.	Df	Směr. odch.	F-kritérium	Kritický kvantil	Závěr	p-hodnota
C521f1	1359,416667	453,1388889	3	21,28705919	1,705934641	2,901119584	Nevýznamný	0,1854731978
C521f2	24525,75	8175,25	3	90,41708909	30,77741176	2,901119584	Významný	1,490371918E-009
Interakce	6212,75	690,3055556	9	26,27366658	2,598797386	2,188765768	Významný	0,02245349816
Rezidua	8500	265,625	32	16,29800601				
Celkem	40597,91667	863,785461	47	29,3902273				

